

計算一組反高斯順序統計的期望值與共變數-應用於最佳線性不偏估計量的建立

鄭柳熒、陳慧芬,傅家啟

E-mail: 9015667@mail.dyu.edu.tw

摘要

本論文研究探討反高斯分配 (INVERSE-GAUSSIAN DISTRIBUTION) 母體期望值與標準差的最佳線性不偏估計量 (BEST LINEAR UNBIASED ESTIMATOR, BLUE)。給定一組來自反高斯母體的順序統計, BLUE是這組順序統計的線性組合, 而線性組合的係數是標準化反高斯順序統計之期望值、變異數與共變數的函數, 因此本研究重點在提出計算一組反高斯順序統計之期望值、變異數及共變數的方法。反高斯分配是常用的機率分配模式之一, 因其具三個特性: (1) 此分配的失敗函數 (FAILURE FUNCTION) 是非單調函數, 它先遞增然後遞減, 最後收斂至一常數值, (2) 此分配有多種形狀, 從極度右偏到幾近於常態, (3) 適用於多種過程 (PROCESS), 因 BROWNIAN MOTION 的第一次離開前之停留時間服從反高斯分配; 因此適合作為產品或設施的壽命分配模式。本研究擬發展一電腦軟體來計算反高斯順序統計的期望值、變異數與共變數。傳統方式是列出表格供使用者查表, 但缺點為表格可列出的數值有限, 若我們想查的數值不在表格內, 則必須以內插法或更糟糕的外插法來近似, 可能造成極大誤差。電腦軟體則不受此限制, 使用者可輸入任意參數值, 軟體就會算出欲求的答案, 當然使用電腦軟體須注重計算效率, 因此本論文分別使用數值分析與模擬方法, 並比較兩方法的優劣。我們提出數值分析與模擬估計法來計算順序統計的期望值、變異數與共變數, 數值分析法係採修正中點法與 GAUSSIAN QUADRATURE 法來計算一維積分值的期望值與變異數及二維積分的共變數。模擬估計法則產生 M 組樣本數為 N 的順序統計值, 然後以這 M 組樣本計算所有期望值、變異數及共變數的估計值, 此為原始估計值。反高斯分配觀察值的產生法有卡方分配法與反函數法, 我們採反函數法, 因為它可以配合使用變異數降低法裏的控制變數法以降低估計值的標準差, 我們定義的控制變數有兩種: (一) U(0,1) 内部控制變數: 以 U(0,1) 順序統計之期望值估計、變異數估計及共變數估計當控制變數, (二) EXP(1) 外部控制變數: 以 EXP(1) 順序統計之期望值估計、變異數估計及共變數估計當控制變數。在數值分析法的評估方面, 實驗結果顯示, (一) 修正中點法的速度慢, 在相同運算時間下, 修正中點法的絕對誤差甚至高於模擬估計值的標準誤差。(二) GAUSSIAN QUADRATURE 法的速度比修正中點法快很多, 但是當反高斯分配的偏度很高時, GAUSSIAN QUADRATURE 法的積分近似值非常不準確, 即使增加運算時間也難以改善精確度。因此模擬估計法在運算效率及準確度等雙重考量下較數值分析法佳。在模擬估計法的變異數降低效果方面, 我們由模擬實驗結果得到四個結論: (一) 在大部分情形下控制變數法的變異數降低效果顯著, 而以 EXP(1) 控制變數法較優於 U(0,1) 者; 但是當反高斯的偏度很高時, 變異數降低效果則不顯著。(二) 不管 U(0,1) 或 EXP(1), 當偏度值增加時, 變異數降低效果先隨著偏度值增加而提高, 然後在達到某偏度值後則隨著偏度值增加而降低。(三) EXP(1) 控制變數法在偏度值約為 2 時有最佳變異數降低效果, 這是因為 EXP(1) 分配的偏度值也是 2。(四) EXP(1) 控制變數能有效降低最大順序統計量 (期望值、變異數與共變數) 之估計值變異, 因為 EXP(1) 如同反高斯分配, 其觀察值的值域沒有上限。而 U(0,1) 因為有上限, 因此在最大順序統計量上的變異數降低效果不佳。由於相較於其他順序, 最大順序統計量估計值的變異數較高, 因此 EXP(1) 控制變數法優於 U(0,1) 控制變數法。

關鍵詞: 最佳線性不偏估計量, 卡方分配法, 控制變數法, GAUSSIAN QUADRATURE 法, 反高斯分配, 反函數法, 中點法, 模擬估計, 數值積分, 順序統計, 變異數降低法

目錄

第一章 緒論--P1 1.1 研究背景與動機--P1 1.2 研究問題定義及研究目的--P4 1.3 研究成果--P6 1.4 論文架構--P6 第二章 文獻回顧--P8 2.1 反高斯分配 (INVERSE-GAUSSIAN DISTRIBUTION)--P8 2.1.1 雙參數型態的反高斯分配--P8 2.1.2 三參數型態的反高斯分配--P10 2.1.3 反高斯分配與高斯分配的關係--P14 2.1.4 反高斯分配觀察值的模擬產生法--P1 2.2 反高斯順序統計的期望值、變異數與共變數--P16 2.3 反高斯分配之母體期望值與變異數的最佳線性不偏估計量 (BLUE)--P19 2.4 數值積分法--P21 2.4.1 中點法--P21 2.4.2 GAUSSIAN QUADRATURE 法--P24 第三章 研究方法與實驗結果--P27 3.1 數值分析法--P28 3.1.1 中點法--P28 3.1.2 GAUSSIAN QUADRATURE 法--P32 3.1.3 中點法與 GAUSSIAN QUADRATURE 法比較--P34 3.2 模擬估計法--P40 3.2.1 反函數法 (INVERSE TRANSFORMATION)--P41 3.2.2 控制變數法一: U(0,1) 順序統計--P47 3.2.3 控制變數法二: EXPONENTIAL(1) 順序統計--P56 3.2.4 比較原始估計值與 U(0,1) 及 EXP(1) 控制變數估計值--P64 3.3 模擬估計法與數值分析法之比較--P76 第四章 結論--P83

參考文獻

1. BALAKRISHNAN, N., W. W.S. CHEN (1997). CRC HANDBOOK OF TABLES FOR ORDER STATISTIC -S FROM INVERSE GAUSSIAN DISTRIBUTIONS WITH APPLICATIONS. NEW YORK, NY: CRC PRESS 2. BANERJEE, A.K., AND G.K. BHATTACHARYYA (1976). A PURCHASE INCIDENCE MODEL WITH IN -VERSE GAUSSIAN INTERPUCHASE TIMES. JOURNAL OF AMERICAN STATISTICAL ASSOCIATION 71, 823--829. 3. BICKEL, P. J. AND K. A. DOKSUM (1977). MATHEMATICAL STATISTICS: BASIC IDEALS AND SELECTED TOPICS. OAKLAND, CA: HOLDEN-DAY, INC. 4. CHENG, R. C. H. AND N.A.K. AMIN (1981). MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION OF PARAMETERS IN THE INVERSE GAUSSIAN DISTRIBUTION WITH UNKNOWN ORIGIN. TECHNOMETRICS 23,257--263. 5. CONTE, S.D. AND C. DE BOOR (1980). ELEMENTARY NUMERICAL ANALYSIS: AN ALGORITHMIC APPROACH, NEW YORK, NY: MCGRAW-HILL, INC. 6. FOLKS, J.L. AND R.S. CHHIKARA (1978). THE INVERSE GAUSSIAN DISTRIBUTION AND ITS STATISTICAL APPLICATION---A REVIEW. JOURNAL OF ROYAL STATISTICAL SOCEITY B40, 263--289. 7. GACULA, M. C., JR., AND J. J. KUBALA (1975). STATISTICAL MODELS FOR SHELF LIFE FAILURES. J. FOOD SCI. 40, 404--409. 8. JOHNSON, N.L. AND S. KOTZ (1970). CONTINUOUS UNIVARIATE DISTRIBUTIONS---2. NEWYORK, NY: JOHN WILEY AND SONS. 9. LANCASTER, A. (1972). A STOCHASTIC MODEL FOR THE DURATION OF A STRIKE. J.R. STATIST. SOC. A135, 257--271. 10. LAW, A.M. AND W.D. KELTON (2000). SIMULATION MODELING AND ANALYSIS. MCGRAW-HILL, INC. 11. LEHMANN, E.L. (1983). THEORY OF POINT ESTIMATION. NEW YORK, NY: JOHN WILEY & SONS. 12. LIEBLEIN, J. AND M. ZELEN (1956). STATISTICAL INVESTIGATION OF THE FATIGUE LIFE OF DEEP-GROOVE BALL BEARINGS. J. RES. NAT. BUR. STAND. 57, 272--316. 13. MICHAEL, J.R., W.R. SCHUCANY, AND R.W. HAAS (1976). GENERATING RANDOM VARIABLES USING TRANSFORMATION WITH MULTIPLE ROOTS. AMER. STATIST. 30, 88--90. 14. PRESS, W. H., S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING, AND B. P. FLANNERY (1997). NUMER -ICAL RECIPES IN C---THE ART OF SCIENTIFIC COMPUTING, 2ND ED. NEW YORK, NY: CAMBR -IDGE UNIVERSITY PRESS. 15. ROSS, S. (1988). A FIRST COURSE IN PROBABILITY, 3RD ED. NEW YORK, NY: MACMILLAN PUBLISHING CO. 16. SICHEL, H.S. (1975). ON A DISTRIBUTION LAW FOR WORD FREQUENCIES. JOURNAL OF AMER -ICAN STATISTICAL ASSOCIATION 70, 542--547. 17. TWEEDIE, M.C.K. (1945). INVERSE STATISTICAL VARIATES. NATURE, 155--453. 18. TWEEDIE, M.C.K. (1947). FUNCTIONS OF A STATISTICAL VARIATE WITH GIVEN MEANS WITH SPECIAL REFERENCE TO LAPLACIAN DISTRIBUTIONS, IN PROCEEDINGS OF THE CAMBRIDGE PHIL -OSOPHICAL SOCEITY 43, 41--49. 19. TWEEDIE, M.C.K. (1957). STATISTICAL PROPERTIES OF INVERSE GAUSSIAN DISTRIBUTIONS, -I. ANNALS OF MATHEMATICAL STATISTICS 28, 362--377. 20. VON ALVEN, W. H. (1964). RELIABILITY ENGINEERING BY ARINC, ENGLEWOOD CLIFFS, EDITOR. UPPER SADDLE RIVER, NJ: PRENTICE-HALL, INC. 21. WADDELL, P. J. AND M. A. STEEL (1997). GENERAL TIME-REVERSIBLE DISTANCES WITH UNEQU -AL RATES ACROSS SITES: MIXING AND INVERSE GAUSSIAN DISTRIBUTIONS WITH INVARIA -NT SITES. MOLECULAR PHYLOGENETICS AND EVOLUTION 8, 398--414. 22. WALD, A. (1947). SEQUENTIAL ANALYSIS. NEW YORK, NY: JOHN WILEY & SONS, INC. 23. WASAN, M.T. (1968). ON AN INVERSE GAUSSIAN PROCESS, SKAND. AKTUAR. 60, 69--96. 24. WHITMORE, G.A. (1979). AN INVERSE GAUSSIAN MODEL FOR LABOUR TURNOVER. JOURNAL OF ROYAL STATISTICAL SOCEITY A142, 468--478. 25. WISE, M. E., S. B. OSBORN, J. ANDERSON, AND R.W.S. TOMLINSON (1968). A STOCHAST -IC MODEL FOR TURNOVER OF RADIOCALCIUM BASED ON THE OBSERVED LAWS. MATH. BIOSCI. 2, 199--224. 26. WISE, M.E. (1971). SKEW PROBABILITY CURVES WITH NEGATIVE POWERS OF TIME AND REL -ATED TO RANDOM WALKS IN SERIES. STATIT. NEERL. 25, 159--180. 27. WISE, M.E. (1975). SKEW DISTRIBUTIONS IN BIOMEDICINE INCLUDING SOME WITH NEGA -TIVE POWERS OF TIME. IN STATISTICAL DISTRIBUTIONS IN SCIENTIFIC WORK 2: MODEL BUILDING AND MODEL SELECTION, ED. G.P. PATIL ET AT. DORDRECHT: REIDEL, 241--262.